

ESTUDIO MATEMATICO DEL CRECIMIENTO DE ACAROS TETRANQUIIDOS EN CONDICIONES DE CAMPO. RELACION PRESA – DEPREDADOR

Ileana Miranda Cabrera¹, Grupo de Computación y Matemática Aplicada,
Centro Nacional de Sanidad Agropecuaria (CENSA)

Mayra Ramos Lima², Grupo de Acarología, Centro Nacional de Sanidad Agropecuaria (CENSA)

RESUMEN

Durante cinco años, mediante muestreos quincenales se evaluó la abundancia del ácaro *Tetranychus urticae* y sus enemigos naturales con el propósito de encontrar un modelo que permita predecir niveles poblacionales. Se realizó una investigación estadística dirigida a estudios de disposición espacial. Se logró establecer un modelo logístico que permite valorar la presencia-absencia de la plaga y se propone un biomodelo para expresar la relación presa-depredador y otro para estimar el grado de infestación del campo.

Palabras clave: Biomodelos, disposición espacial, presa-depredador.

ABSTRACT

During five years was carried out the sampling of a population of the mite *Tetranychus urticae* and their natural enemies with the purpose of finding a model that allows predict the abundance of this populations. It was carried out a statistical investigation directed to studies of spatial pattern. It was succeeded in establishing a logistic model that allows value the presence-absence of the plague and they propose a ecological models in order to express the relationship prey-predator and other for determinate the infestation grade of the field.

Key words: mathematical modeling-ecology, spatial pattern, prey-predator

MSC: 62P10

1. INTRODUCCION

Los métodos de la estadística univariada y bivariada, tales como el análisis de varianza, la prueba t y los análisis de regresión constituyen hoy una herramienta común del biólogo. Tal como señala Cornide en 1996, también son de uso común muchos de los métodos de la estadística multivariada. Estos comenzaron a usarse con la clasificación taxonómica y hoy son útiles hasta en los grandes estudios de biología molecular.

A pesar de este gran uso de la estadística, por su complejidad los sistemas biológicos no han sido estudiados por los métodos clásicos del análisis matemático, tal como lo emplean los físicos y los químicos. En los últimos años, con el auge de la computación se han abierto nuevas temáticas para el uso de los métodos numéricos en el estudio de estos sistemas.

Tal como señala Rabbinge en 1989, actualmente la modelación y simulación están consideradas como los métodos matemáticos de mayor aplicación práctica en el estudio de poblaciones biológicas. Por ello, para hacer estudios de predicción debemos establecer un modelo.

Aunque, según del Pozo, 1999 cualquier representación simplificada de la realidad constituye un modelo. Este debe estar relacionado con la estructura o función del sistema real al cual representa. Tal y como lo expresa Fernández en 1995, pueden emplearse palabras, diagramas, notaciones, fórmulas matemáticas o estructuras físicas.

Existen diferentes tipos de modelos matemáticos. En 1995 De Wit señala que en biología son más comúnmente usados los modelos determinísticos y Bertsching en ese mismo año plantea que los modelos determinísticos o estocásticos aportan mayor precisión.

E-mail: ¹ileanam@censa.edu.cu

²mayramos@id.censa.edu.cu

Por otra parte, en su libro sobre modelos matemáticos en ecología de 1999, Jeffries plantea que en estudios bioecológicos resulta más lógico explicar las relaciones empleando modelos que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales.

Se han logrado establecer modelos para la dinámica de algunas poblaciones, tal es el caso del modelo de Verhulst expuesto en detalles por Von Bertalaffy en 1995. Este modelo emplea una sola ecuación diferencial, lo cual conduce a imprecisiones ya que, como señala Espi en el 2000, la mejor forma de expresar los cambios biológicos es representándose un sistema de ecuaciones que constituyen un modelo dinámico-determinista. Dinámico porque analiza las variables en el tiempo y determinista porque contiene distribuciones probabilísticas

Para ácaros tetránquidos en 1995 Ramos realizó estudios de su biología y dinámica espacial. Pero, aún no se conoce un modelo matemático capaz de determinar los niveles de la plaga en el campo.

Por las pérdidas económicas que causa el ácaro *Tetranychus urticae* en los cítricos, especialmente en la naranja, renglón exportable de nuestro país, y por el desconocimiento de la relación existente en cuanto a los niveles poblacionales de la plaga, necesitamos un modelo predictor de las densidades poblacionales de este ácaro y un estudio detallado de su distribución en el espacio y en el tiempo.

Por consiguiente, el presente trabajo tiene el propósito de precisar los valores climáticos que originan los picos poblacionales de la plaga *Tetranychus urticae*, realizar un estudio de su disposición en el espacio. Así como, proponer un modelo dinámico determinístico que permita predecir los niveles de la plaga y exprese matemáticamente la relación de esta presa con sus depredadores.

2. PLAN DE MUESTREO

Para cumplir nuestro propósito nos dotamos de una base de datos que fue conformada con la información de muestreos quincenales llevados a cabo durante cinco años consecutivos (octubre, 83 a septiembre, 88) en un campo de naranja valencia.

Para muestrear el área en estudio se tuvo en cuenta que debíamos lograr una representación de lo que ocurre en el campo. Por ello, se realizó un muestreo sistemático, tomando en el primer muestreo una planta al azar y a partir de ella, una de cada cuatro plantas hasta completar 20 iniciando cada muestreo en árboles subsiguientes.

Muestreo 1: plantas 7, 11, 15,... 83

Muestreo 2: 8, 12, 16,...84

...

El conjunto de las 20 plantas del muestreo j queda conformado según $C_j = j + (n - 1) + 4k$, siendo n el número aleatorio elegido y k entero del conjunto $\{0,1,2,...19\}$.

Las plantas fueron divididas en cuadrantes (norte, sur, este y oeste) y se observaron ocho hojas al azar en cada uno (cuatro viejas y cuatro nuevas). En cada hoja se revisó el haz y el envés, realizando el conteo poblacional de la plaga y sus enemigos naturales phytoseiulus y stygmeidus y demás depredadores.

También se recopilaron los datos climáticos de los días en que se realizó cada muestreo. Tomando mediciones de temperatura máxima, mínima y media, humedad relativa máxima, mínima y media, precipitaciones y velocidad del viento.

Para estudios posteriores se recomienda realizar un muestreo adaptativo bajo contactos aleatorios (Bouza, 2000) para garantizar la toma de aquellas unidades muestrales (plantas) donde se agrupe el mayor número de individuos, con el fin de tener una representación más acertada de lo que ocurre en todo el campo.

3. ESTUDIO ESTADISTICO PRELIMINAR

Se realizó un análisis de varianza tomando como factores el cuadrante al que pertenece la unidad muestral, el tipo de hoja, ya sea nueva o vieja y la posición en que fue observada ya sea por el haz o por el envés; se tomó como variable independiente el conteo poblacional de la plaga transformado esta variable según $\sqrt{x + 0.5}$.

Este análisis evidenció que no es necesario realizar muestreos por cuadrante o por tipo de hoja , ya que no se encontraron diferencias significativas para estos factores con $p < 0.05$, contrario a lo que ocurrió para la posición de las hojas, para este factor se detectó que la plaga se encontraba preferentemente en el envés. Para evidenciar esto se realizó un gráfico en el tiempo del conteo poblacional de la plaga y la suma total de los depredadores, comparando la situación en el haz y en el envés. (Figura 1).

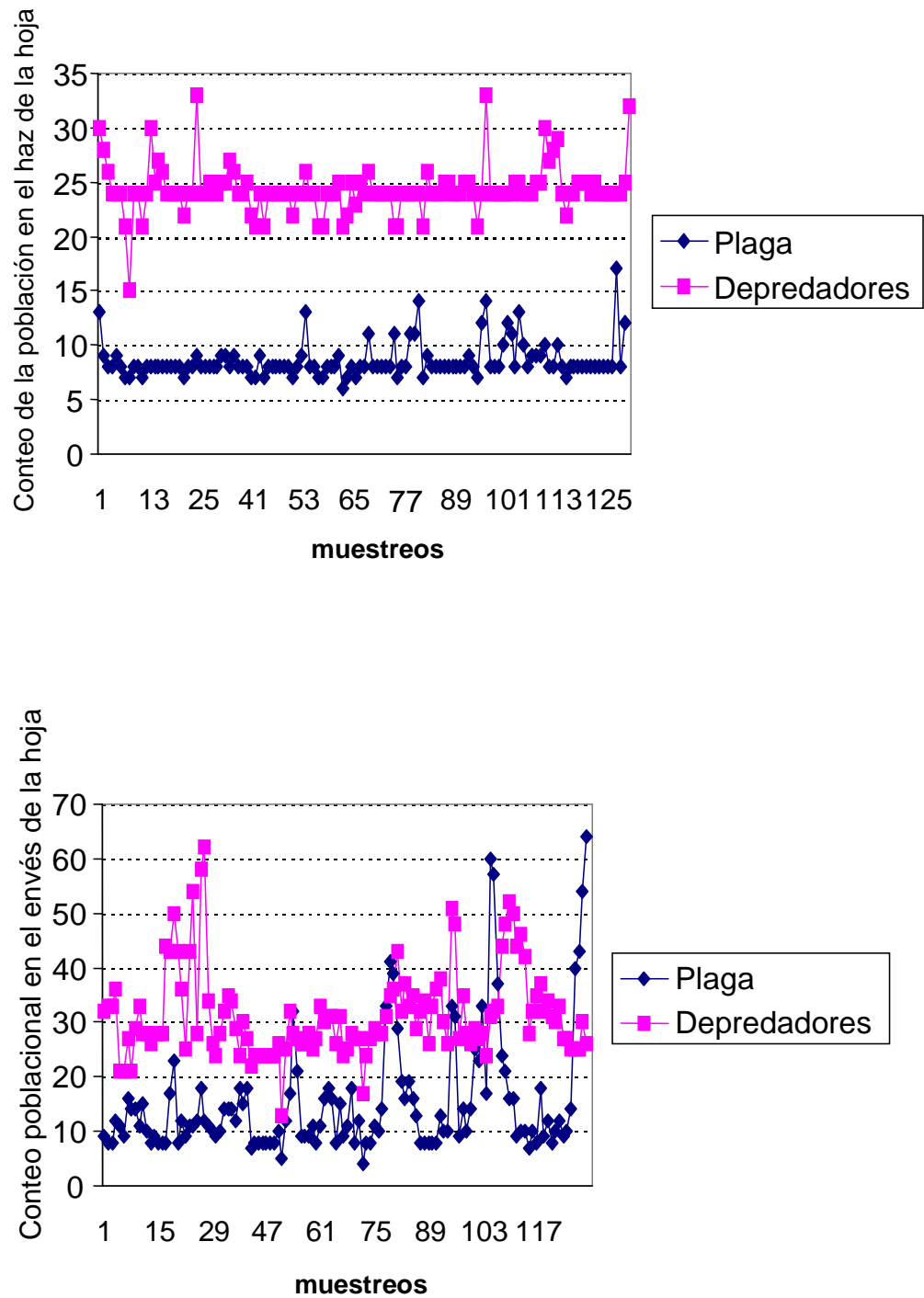


Figura 1. Dinámica poblacional de la plaga y sus depredadores.

Valorando el comportamiento de la plaga luego de los muestreos realizados se puede apreciar que para algunos intervalos de las series de dinámica poblacional, la plaga y sus enemigos naturales muestran similar comportamiento en cuanto a fluctuaciones y posición de los picos poblacionales. Esto se debe a que son especies de la misma familia.

Otro aspecto que se aprecia claramente en el gráfico de dinámica y que constituye una de las conclusiones más importante de este trabajo, es que la suma total de los depredadores no logra mantener siempre los niveles de la plaga inferiores a 10 ácaros por muestreo.

Según Ramos, 1995 en el caso de los depredadores exclusivos la tasa óptima de liberación es 20:1. Pero, en el caso de aquellos depredadores que, como estos, se alimenten de otras especies no se ha establecido cuantos depredadores deben existir por cada un ácaro para mantener el equilibrio ecológico. Si planteamos el análisis en el sentido de determinar cuantos depredadores deben existir **para mantener el nivel de población inferior a 10, vemos que de forma natural esto solo ocurrió cuando existían aproximadamente 30 depredadores**, considerando en este número total cualquiera de las poblaciones en estudio.

Refiriéndonos a las condiciones climáticas que caracterizan los muestreos, podemos señalar que los picos poblacionales de *tetranychus urticae* aparecen en los meses de agosto, septiembre y octubre, **reportando clima favorable para la plaga temperaturas máximas entre 27 y 32 °C, mínimas entre 18 y 23.5 °C, humedad superior al 96 % y precipitaciones inferiores a los 108 mm**.

Para continuar el estudio de la plaga, siguiendo los métodos para establecer el patrón de disposición espacial de insectos planteados por Southwood en 1991 y reiterados por Niño en 1995, se calcularon la media (m) y la varianza poblacional (s^2) de cada muestreo, con estos valores se realizaron las regresiones de Taylor, Iwao, y Kuno.

En la ecuación de Taylor el valor de la pendiente b es una característica de la población en el hábitat y el intercepto $\log(a)$, una función del método de muestreo.

$$\log(s^2) = \log(a) + b \cdot \log(m)$$

Iwao relaciona la media de agregación de Lloyd (número promedio por individuos de otros individuos que comparten con él la unidad de muestreo) con la media aritmética.

$$m + \frac{s^2}{m} - 1 = \alpha + \beta \cdot m$$

En esta ecuación el intercepto es el índice básico de contagio, por cada individuo cuantos se esperan que convivan con él y la pendiente β es el coeficiente de densidad que refleja la forma en que este individuo o grupos de individuos están localizados en el ambiente.

Kuno es una transformación de Iwao y da igual interpretación para α y β .

$$s^2 = (\alpha + 1) \cdot m + (\beta - 1) \cdot m^2$$

Aún cuando los acarólogos y entomólogos han utilizado por mucho tiempo los índices de Taylor, los mejores resultados se obtuvieron con la regresión de Kuno que demostró que tanto la plaga como los depredadores forman colonias y mantienen una disposición agregada que no difiere de la Binomial negativa. Aunque en algunos muestreos se detectó que los *Phytoseiulus* (mayores depredadores de esta plaga) aún cuando su disposición es agregada los grupos de individuos tienden a la repulsión. Esto se debe a la competencia existente en el ecosistema. En el anexo 1 se muestra una tabla con las tres regresiones para cada población en estudio.

4. MODELACION MATEMATICA

El objetivo de buscar una ecuación lineal o no lineal que describiera el crecimiento poblacional de esta plaga era tratar de encontrar los valores climáticos y de depredadores que permiten minimizar la población de *Tetranychus urticae* en este ecosistema.

Se realizaron regresiones lineales y no lineales sin lograr encontrar un buen modelo predictor, por ello se realizó una regresión logística que permite conocer la probabilidad de presencia de la plaga (más de 10 individuos por muestreo) demostrando el efecto del clima y los depredadores para esta predicción.

$$y = \frac{e^{\alpha}}{1 + e^{\alpha}}$$

$$\alpha = -20.72 + 0.104*Hrmax + 0.093*Hrmed + 0.258*Otro + 0.054*Phyto - 0.0067*Prec + 0.445*Styg + 0.085*Tmin .$$

El que no se incluyan algunas variables climáticas en esta ecuación, no se debe a que no ejerzan influencia sobre la población, sino a que existe fuerte correlación entre estas y las que se incluyen. La presencia de la plaga está determinada por la anulación de α .

A partir del conocimiento del comportamiento de las variables que intervienen en él, un modelo logístico pudiera servir para simular presencia. Pero, resulta inadecuado para simular niveles poblacionales.

Se proponen en este trabajo dos tipo de modelos dinámicos – determinísticos que deberán ser validados con posterioridad.

El primer modelo está dirigido a estimar la densidad de las poblaciones en el tiempo teniendo en cuenta las tasa de natalidad (λ_i), las tasas de mortalidad (μ_i) y las perdidas de individuos por depredación (β_i)

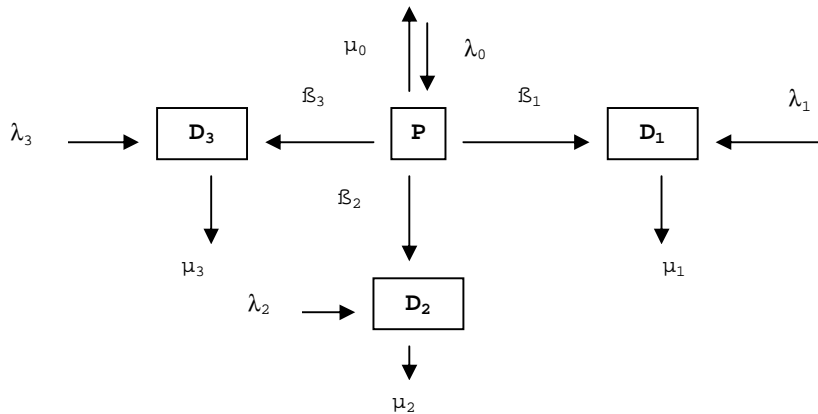


Figura 2. Modelo presa frente a 3 depredadores.

Este modelo se puede representar por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dP}{dt} = (\lambda_0 - \mu_0)P(t) - \beta_1P(t)D_1(t) - \beta_2P(t)D_2(t) - \beta_3P(t)D_3(t)$$

$$\frac{dD_1}{dt} = (\lambda_1 - \mu_1)D_1(t) + \beta_1P(t)D_1(t)$$

$$\frac{dD_2}{dt} = (\lambda_2 - \mu_2)D_2(t) + \beta_2P(t)D_2(t)$$

$$\frac{dD_3}{dt} = (\lambda_3 - \mu_3)D_3(t) + \beta_3P(t)D_3(t)$$

Validándolo con la muestra tomada, obtuvimos un error estándar de 0.084 entre las observaciones reales y las estimadas, lo que demuestra que este puede ser un modelo válido para la población en estudio. Debe ser probado para otras poblaciones y/u otros cultivos.

El segundo modelo propuesto, es un modelo de tipo SIR: Plantas Susceptibles-Infestadas-Recuperadas y sirve para determinar el grado de infestación del campo a partir del número de plantas en uno u otro estado, considerando susceptibles aquellas plantas infestadas con menos de diez individuos, infestadas las que

sobrepasan esta cifra y recuperadas las que no presentan poblaciones de la plaga. λ representa la tasa de cambio por aumento poblacional, μ la tasa de pérdida por muerte y d las pérdidas por depredación.

Este modelo solo ha sido tratado en enfermedades de animales o humanas (Espí,2000), no obstante enfoca bien este problema con la única limitante que tiende a obviar las causas poblacionales, unido al modelo anterior puede resultar extremadamente útil a la hora de decidir sobre la aplicación de una medida de manejo para la plaga ya sea química o biológica.

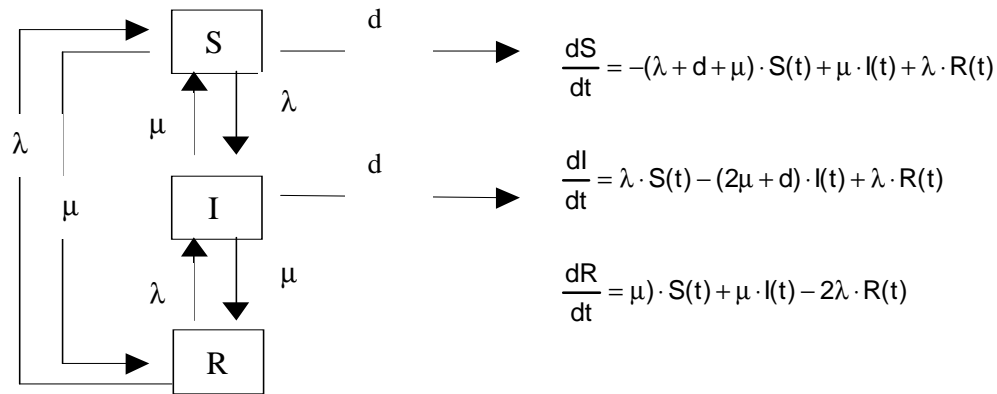


Figura 3. Modelo SIR.

5. CONCLUSIONES

Se ha demostrado que existen condiciones climáticas que favorecen el aumento poblacional de la plaga *Tetranychus urticae*. y que estas pueden darse en los meses de agosto, septiembre y octubre.

En el momento de hacer aplicaciones biológicas deben liberarse 30 depredadores por cada 20 plantas en un campo. Teniendo en cuenta que la plaga forma colonias debido a su disposición agregada deben hacerse las liberaciones en las zonas de focos poblacionales.

La regresión logística puede ser un buen estimador de la presencia de plaga en el campo. Existen dos modelos determinísticos dados a la estimación de densidades poblacionales en el sentido de número de individuos o unidades muestrales. Se recomienda validar ambos modelos en poblaciones de otro cultivo a partir de muestreo adaptativo bajo contactos aleatorios.

ANEXO

Resultados de las regresiones de Taylor, Iwao y Kuno.

Población	Taylor	Iwao	Kuno
Turti	$S^2 = 1.72 + 1.89 \cdot m \quad R^2 = 0.96$	$X^* = -0.27 + 6.19 \cdot m \quad R^2 = 0.90$	$S^2 = 1.42 \cdot m + 4.18 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.96$
	$S^2 = 1.27 + 1.63 \cdot m \quad R^2 = 0.92$	$X^* = -0.20 + 2.94 \cdot m \quad R^2 = 0.63$	$S^2 = -75.2 \cdot m + 3.45 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.63$
Phyto	$S^2 = 1.19 + 1.66 \cdot m \quad R^2 = 0.88$	$X^* = -2.35 + 7.90 \cdot m \quad R^2 = 0.82$	$S^2 = -12.6 \cdot m + 10.9 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.98$
	$S^2 = 0.69 + 1.47 \cdot m \quad R^2 = 0.81$	$X^* = -0.70 + 2.48 \cdot m \quad R^2 = 0.53$	$S^2 = -15.1 \cdot m + 0.67 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.63$
Styg	$S^2 = 1.44 + 1.69 \cdot m \quad R^2 = 0.97$	$X^* = -0.15 + 3.90 \cdot m \quad R^2 = 0.90$	$S^2 = 1.47 \cdot m + 2.34 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.99$
	$S^2 = 1.08 + 1.58 \cdot m \quad R^2 = 0.89$	$X^* = -0.60 + 4.23 \cdot m \quad R^2 = 0.86$	$S^2 = -2.92 \cdot m + 4.44 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.98$
Otros	$S^2 = 1.80 + 1.92 \cdot m \quad R^2 = 0.97$	$X^* = -0.46 + 6.39 \cdot m \quad R^2 = 0.94$	$S^2 = 4.69 \cdot m + 3.93 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.99$
	$S^2 = 0.61 + 1.35 \cdot m \quad R^2 = 0.86$	$X^* = -0.21 + 2.36 \cdot m \quad R^2 = 0.59$	$S^2 = 3.17 \cdot m + 0.47 \cdot m^2 \quad R^2 = 0.49$

En cada caso, la primera ecuación es para el as y la segunda para el envés.

REFERENCIAS

- BERTSCHINGER, L.; E.R. KELLER and C. GESSLER (1995): "Development of EPIVIT, a simulation model for contact -and aphid- transmitted potato viruses", **Phytopathology** 85(7), 801-814.
- BOUZA, C.N. (2000): " Muestreo adaptativo bajo contactos aleatorios", **Investigación Operacional** 21(1), 38-45.
- COCHRAN, W.G. (1981): " Técnicas de muestreo", Editorial CECSA, México.
- CORNIDES, MARIA T. (1996): "La modelación y su aplicación en la epidemiología", Universidad de La Habana, Area de Ciencias Biológicas.
- COSTA, M.I.S. y BOLDRINI, J.L. (1997): "Chemotherapeutic treatments: A study of the interplay among drug resistance, toxicity and recuperation from side effects", **Bulletin of Mathematical Biology** 59(2):205-232.
- CHIORINO, G.; P. AUGER; J.L. CHASSE y S. CHARLES (1999): "Behavioral choices based on patch selection a model using aggregation methods", **Mathematical Bioscience** 157 (1-2):189-216.
- DE WIT, R.; F.P. VAN DEN ENDE y H. VAN GEMERDEN (1995): "Mathematical simulation of the interactions among cyanobacteria, purple sulfur bacteria and chemotropic sulfur bacteria in microbial mat communities", **Microbiology Ecology** 17(2):117-136.
- DEL POZO, P.P. y L. FERNANDEZ (1999): "El papel de la modelación y la simulación en la investigación de las ciencias agropecuarias", Monografía, La Habana, UNAH.
- ESPI, Z. (2000): " Ecuaciones diferenciales aplicadas a la modelación de la Mastitis Bovina", Tesis en opción al título de master en matemática a las ciencias agropecuarias, UNAH, La Habana.
- FERNANDEZ, L. (1996): "Modelos que describen la dinámica de procesos biológicos en la ciencias agropecuarias", Tesis en opción al título de master en matemática a las ciencias agropecuarias, UNAH, La Habana.
- JEFFRIES, C. (1999): "Mathematical modeling in ecology ", Biblioteca de Málaga, Birkhäuser . Boston. Basel. Berlin.
- MAGNUSSON, K.G (1999): "Destabilizing effect of cannibalism on a structured predator-prey system", **Mathematical- Bioscience** , 155(1):61-75.
- NIÑO, J.C.; T. PALACIO y D. CORREDOR (1995): "Muestreo secuencial para trips *Frankliniella occidentalis* (pergande) (THYSANOPTERA: THRIPIDAE), en un cultivo de mora (*Rubus glaucus Benth.*) bajo invernadero", **Agronomía Colombiana** XII (2): 115-126.
- RABBINGE, R.; S.A. WARD y H.H. VAN LAAR (1989): "Simulation and system management in crop protection", Center for Agricultural Publishing and Documentation (Pudoc), Wageningen. Netherlands.
- RAMOS, M. (1995): "Uso de *Phytoseiulus macropilis* (BANKS) (ACARRI:PHYTOSEIDAE) en el control de *Tetranychus tumidus* (BANKS) (ACARRI:TETRANICHIDAE) en viveros de plátano". Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias agrícolas, Centro Nacional de Sanidad Agropecuaria, La Habana.

SOUTHWOOD, T.R.E. (1991): "Ecological Methods with particular reference to the study of insect populations", Chapman and Hall, University Press, Cambridge, Gran Bretaña.

VON BERTALAFFY, L. (1995): "Teoría general de los sistemas, fundamento, desarrollo, aplicaciones", Décima impresión, Fondo de cultura económica, UNAH. La Habana.